

(3)【证明】第一步:甲在参加了 $2n+2(n \in \mathbf{N}^*)$ 轮比赛后被淘汰,第一项是 1,最后一项是 -1,中间 $2n$ 项是由 n 个 1, n 个 -1 组成的数列,共有 C_{2n}^n 个

甲在参加了 $2n+2(n \in \mathbf{N}^*)$ 轮比赛后被淘汰,其比赛情况用 1, -1 表示得到的数列,第一项是 1,最后一项是 -1,中间 $2n$ 项是由 n 个 1, n 个 -1 组成的数列,观察中间 $2n$ 项组成的新数列,记其前 k 项和为 T_k ,则 $T_k \geq 0$ 对 $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 恒成立.

由 n 个 1, n 个 -1 组成的数列,共有 C_{2n}^n 个. 11 分

第二步:求出由 n 个 1, n 个 -1 组成,且存在 $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 使得 $T_k < 0$ 的数列的个数为 C_{2n}^{n-1} ,从而得到中间 $2n$ 项符合条件的数列个数是 $C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$

现在考虑,由 n 个 1, n 个 -1 组成,且存在 $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 使得 $T_k < 0$ 的数列的个数.不妨设满足 $T_k < 0$ 的 k 的最小值为 m ,则一定有 $T_m = -1$,且 m 为奇数,这个数列的前 m 项有 $\frac{m-1}{2}$ 个 1 和 $\frac{m+1}{2}$ 个 -1,将此数列的前 m 项中的 1 改成 -1, -1 改成 1,其他项不变,这样就得到了由 $n+1$ 个 1, $n-1$ 个 -1 组成的数列;

反过来,由 $n+1$ 个 1, $n-1$ 个 -1 组成的数列,因为其前 $2n$ 项和为 2,所以一定存在 k ,使得其前 k 项和大于 0,找到这样的 k 的最小值 m ,则前 m 项和为 1,且 m 为奇数,前 m 项中有 $\frac{m-1}{2}$ 个 -1 和 $\frac{m+1}{2}$ 个 1,将其前 m 项中的 -1 改成 1, 1 改成 -1,其他项不变,则得到的数列是由 n 个 1, n 个 -1 组成的数列,且 $T_m = -1 < 0$.

因此,由 n 个 1, n 个 -1 组成,且存在 $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 使得 $T_k < 0$ 的数列的个数,等于由 $n+1$ 个 1, $n-1$ 个 -1 组成的数列的个数,为 C_{2n}^{n-1} 14 分

所以中间 $2n$ 项符合条件的数列个数是 $C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$ 15 分

第三步:求甲在参加了 $2n+2(n \in \mathbf{N}^*)$ 轮比赛后被淘汰的概率

因此,甲在参加了 $2n+2(n \in \mathbf{N}^*)$ 轮比赛后被淘汰的概率 $p_3 = (C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}) \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{2n+2}}$ 17 分

关键点拨 此题第(3)问的解题关键是利用间接法求甲在参加了 $2n+2(n \in \mathbf{N}^*)$ 轮比赛后被淘汰的概率,因为中间 $2n$ 项是由 n 个 1, n 个 -1 组成的数列,共有 C_{2n}^n 个,而由 n 个 1, n 个 -1 组成,且存在 $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ 使得 $T_k < 0$ 的数列的个数为 C_{2n}^{n-1} ,所以中间 $2n$ 项符合条件的数列个数是 $C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1}$.

趋势预测 在 2024 年全国新课标卷中,题量减少,解答题由原来的 6 道题减少为 5 道题,但实际对模块知识的考查并没有减少,比如 2024 年全国新课标 II 卷中第 19 题出现双曲线与数列的融合,所以在解答题中,模块融合的题目会加强考查,综合性更强,考查知识的灵活运用能力. 本题以猜灯谜作为命题背景,交汇考查了数列、概率与组合数.

试做反馈 第 19 题第(1)(2)问得分情况较好,部分学生可以拿满分,失分情况主要是在分析情况时不齐全导致概率计算出现错误;第(3)问涉及数列与概率的融合,难度系数高.

▶ 第(3)问 8 分,分成 $2+3+1+2$ 四部分给分

▶ 结果正确,给 2 分

▶ 转化正确,给 2 分;结果正确,给 1 分,共 3 分

▶ 结果正确,给 1 分

▶ 证得概率表达式,给 2 分

2025 年全国高考名校名师联席命制 数学信息卷(二)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	B	D	C	A	B	B	D	A	AC	ACD	BCD	$y = -x + 1$	$2\sqrt{3}$	$-6 + 3e^3$

试做分析

一、整体情况

本卷组织河北省秦皇岛一中共计 209 名学生进行模拟测试,从整体来看,本套试卷覆盖了高中数学的主干内容,重视对数学思想方法的考查,体现新高考多思少算的命题思想. 学生做题流畅度高,整体平均得分为 125.8 分,其中,最低分 89 分,最高分 150 分.

二、选择题

注重基础,同时兼顾创新. 选择题平均得分 51.5 分,失分相对较严重的情况主要集中在第 7, 8, 10, 11 题. 第 7 题考查双曲线的离心率,利用余弦定理得到一元二次方程,由于粗心计算错误;第 11 题为抛物线与圆的综合,设题方式灵活,解析几何、数形结合法、代数运算相结合,类比 2024 年全国新课标 II 卷第 10 题的设题背景,考查全面.

三、填空题

填空题平均得分 14.3 分,失分主要集中在第 14 题.第 14 题考查分段函数的零点问题,同时需要考虑构造函数求最值,试题综合性强,难度略大.

四、解答题

每个解答题都是分层设问,难易搭配适当,控制了较难题的比例.第 18 题设 3 问,分别为考查利用导数判断函数单调性,根据不等式恒成立求参数以及证明不等式,其中,第 3 问需结合第 2 问结论进行分析,环环相扣;第 19 题考查直线与圆锥曲线的位置关系,直线过定点问题及几何图形中的最值问题,第 3 问难度较大,区分度高.

1. B 【热点】解不等式和集合基本运算

【深度解析】依题可知,集合 $A = \{x | x^2 + 5x - 14 < 0\} = \{x | -7 < x < 2\}$, $B = (-\infty, -2)$, 则 $A \cap B = (-7, -2)$. 故选 B.

2. D 【热点】复数的基本运算、共轭复数及求复数的模

【深度解析】 $\because z = \frac{1-3i}{-i} = 3+i$, $\therefore \bar{z} = 3-i$, $\therefore |\bar{z}| = |3-i| = \sqrt{10}$. 故选 D.

3. C 【热风向】同角三角函数基本关系、三角恒等变换

【深度解析】由 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = 2$ 得, $\frac{1}{1 - \tan \alpha} = 2$ (另解:也可以去分母化为 $\cos \alpha = 2 \sin \alpha$, 则 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$), 所以 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 所以 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \sin 2\alpha = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} - \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{11}{5}$. 故选 C.

风向解读 近 3 年高考数学试题中,多次出现对三角恒等变换知识的考查,3 年 6 考,多次涉及“角变换”技巧、同角三角函数基本关系式、诱导公式等,需要学生注意对基础知识(三角函数定义、诱导公式、倍角公式等)熟练掌握,并能灵活运用“角变换”的技巧.本题中对等式关系进行转化,通过分子、分母同时除以 $\cos \alpha$ 得到正切值,进而代入计算.

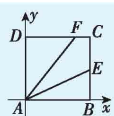
4. A 【热点】圆台体积的计算

【深度解析】圆台下底面半径 $r_1 = 2$ cm, 下底面面积 $S_1 = \pi r_1^2 = 4\pi$ (cm²), 圆台上底面半径 $r_2 = 4$ cm, 上底面面积 $S_2 = \pi r_2^2 = 16\pi$ (cm²), 圆台高 $h = 2 \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$ (cm), 则圆台体积 $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times (4\pi + 16\pi + 8\pi) = \frac{56\sqrt{3}}{3}\pi$ (cm³). 故选 A.

5. B 【热点】平面向量的基底法和坐标法计算平面向量的数量积

【深度解析】(平面向量的基底法)由题可知 $|\vec{AB}| = |\vec{AD}| = 4$, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$, 以 $\{\vec{AB}, \vec{AD}\}$ 为基底, 则 $\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$, $\vec{AF} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \vec{AD}$, 所以 $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = \left(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\vec{AB} + \vec{AD}\right) = \frac{3}{4}\vec{AB}^2 + \frac{1}{2}\vec{AD}^2 = 12 + 8 = 20$. 故选 B.

一题多解 (平面向量的坐标法)以 A 为坐标原点建立平面直角坐标系如图 1 所示, 则 $E(4, 2)$, $F(3, 4)$, 则 $\vec{AE} = (4, 2)$, $\vec{AF} = (3, 4)$, 所以 $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = 12 + 8 = 20$. 故选 B.



6. B 【热点】复合函数求导、三角函数的零点、单调性及周期性

【深度解析】由题意, 函数 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的最小正周期均为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $f'(x) = \omega \cos(\omega x + \varphi)$. 因为

$f'(x) = 0$ 在区间 $(0, \pi)$ 内恰有两个不等实根, 则 $\frac{T}{2} < \pi - 0 \leq \frac{3}{2}T$, 解得 $1 < \omega \leq 3$, 所以 $\frac{2\pi}{3} \leq T < 2\pi$.

因为 $f\left(\frac{5}{3}\right) = f\left(\frac{11}{3}\right) = 0$, $\frac{11}{3} - \frac{5}{3} = 2$, 又 $2 < \frac{2\pi}{3} \leq T$, 所以 $2 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, 即 $\omega = \frac{\pi}{2}$, 所以 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \varphi\right)$.

由 $f\left(\frac{5}{3}\right) = 0$, 得 $\frac{5}{3} \times \frac{\pi}{2} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $\varphi = -\frac{5}{6}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

由 $f\left(\frac{11}{3}\right) = 0$, 得 $\frac{11}{3} \times \frac{\pi}{2} + \varphi = t\pi, t \in \mathbb{Z}$, 解得 $\varphi = -\frac{11}{6}\pi + t\pi, t \in \mathbb{Z}$. 由 $|\varphi| < \pi$, 得 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$.

当 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 时, $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$, 经检验知 $f(x)$ 在区间 $(3, 4)$ 上单调递增, 且 $f'(x) = 0$ 在 $(0, \pi)$ 内有两个不等实根, 满足题意; 当 $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$ 时, $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{5\pi}{6}\right)$, 经检验知 $f(x)$ 在区间

评分细则

失分注意

解一元不等式, 注意对应函数图象及区间取值情况

失分注意

实部相等、虚部互为相反数的两个复数为共轭复数, 注意实部不变, 虚部变号

高分关键

分子、分母同时除以 $\cos \alpha$

高分关键

利用两角和的正切公式, 并且对 $\sin 2\alpha$ 展开式进行“1”的代换, 分子、分母同时除以 $\cos^2 \alpha$, 配凑含有 $\tan \alpha$ 的式子

高分关键

掌握圆台的体积公式

$$V = \frac{1}{3}(S_{\text{上}} + S_{\text{下}} + \sqrt{S_{\text{上}} S_{\text{下}}})h$$

高分关键

平面向量的基底法, 选择基底要找出向量之间夹角, 并且基底不能共线

失分注意

两垂直向量的数量积等于零

高分关键

建系, 利用平面向量数量积的坐标运算求解

失分注意

复合函数 $y = f(g(x))$ 的求导, $u = g(x)$, 对 $f(u)$ 进行求导, $f'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$

失分注意

根据 $|\varphi| < \pi$ 求出 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$

或 $\varphi = -\frac{5\pi}{6}$, 利用函数在给定区间内的单调性等进行验证

(3,4)上单调递减,不符合题意,舍去. 故选 B.

7. D 【热风向】双曲线的定义、离心率、焦点三角形

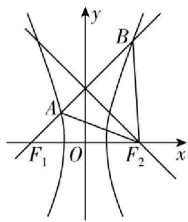
【深度解析】因为 $|AB| = |BF_2|$, 所以由双曲线的定义得, $|BF_1| - |BF_2| = |BF_1| - |BA| = |AF_1| = 2a$, $|AF_2| - |AF_1| = 2a$, 所以 $|AF_2| = 2a + |AF_1| = 4a$.

因为直线 AB 的倾斜角为 45° , 所以 $\angle BF_1F_2 = 45^\circ$.

由余弦定理得, $|F_1F_2|^2 + |F_1A|^2 - 2|F_1F_2| \cdot |F_1A| \cos \angle BF_1F_2 = |AF_2|^2$,

即 $4c^2 + 4a^2 - 8ac \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16a^2$, 化简得 $c^2 - \sqrt{2}ac - 3a^2 = 0$, 则 $e^2 - \sqrt{2}e - 3 = 0$,

解得 $e = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2}$ 或 $e = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{14}}{2}$ (舍). 故选 D.



8. A 【热题型】函数的零点、恒成立问题

思路导引

讨论 $a=0, a>0, a<0$ 的情况 $\rightarrow \begin{cases} a<0, \\ b>1 \end{cases} \rightarrow y=ax+b$ 与 $y=b^x+a$ 有相同零点 $\rightarrow (-a) \ln(-a) = b \ln b \rightarrow$ 构造函数 $g(x) = x \ln x \rightarrow -a = b > 1 \rightarrow 4a + b^2$ 的最小值

【深度解析】当 $a=0$ 时, $f(x) = b^{x+1} > 0$ 恒成立, 显然不满足题意;

当 $a>0$ 时, $b^x + a > 0$, 故需要 $ax + b \leq 0$ 恒成立, 显然不可能成立;

当 $a<0$ 时, 若 $0 < b < 1$, 则当 $x > \log_b(-a)$ 时, $b^x + a < 0$, 此时若取 $x > -\frac{b}{a}$, 则 $ax + b < 0$, 则 $f(x) > 0$, 不

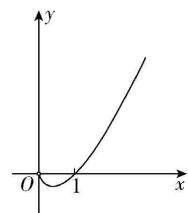
满足题意, 故 $\begin{cases} a<0, \\ b>1 \end{cases}$, 易知函数 $y=ax+b$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $y=b^x+a$ 在 \mathbf{R} 上单调

递增, 故两个函数的零点相同, 则 $ax+b=0, b^x+a=0$ 同时成立, 则 $x = \frac{b}{-a} =$

$\log_b(-a) = \frac{\ln(-a)}{\ln b}$, 故 $(-a) \cdot \ln(-a) = b \ln b$. 设 $g(x) = x \ln x$, 则 $g'(x) = \ln x +$

1, 由 $g'(x) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{e} \Rightarrow g(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, 同理 $g(x)$ 在

$(0, \frac{1}{e}]$ 上单调递减. 注意到 $g(1) = 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) < 0$, 故作出函数 $g(x)$ 的大致图象如图所示, 因为 $g(-a) = g(b)$, $-a > 0, b > 1$, 所以 $-a = b > 1$, 所以 $4a + b^2 = b^2 - 4b = (b-2)^2 - 4 \geq -4$. 故选 A.



试做反馈 本题错选率 27.2%, 易错选项为 C, 本题的错因为学生不能由题目中不等式联想到两函数共零点问题, 进而无法求解出 a 和 b 的关系, 导致失分.

9. AC 【热考点】函数的单调性、极值和函数图象的对称性

【深度解析】对于 A, $f(0) = 1$, 即函数 $f(x)$ 的图象恒过定点 $(0, 1)$, 故 A 正确;

对于 B, $f'(x) = 2(x+1) - \frac{a}{1-x} = \frac{2-a-2x^2}{1-x}$, 当 $a=2$ 时, $f'(x) = \frac{-2x^2}{1-x} \leq 0$, 且等号不恒成立, 则函数 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty, 1)$ 内单调递减, 此时函数无极值点, 故 B 错误;

对于 C, $f'(x) = 2(x+1) - \frac{a}{1-x} = \frac{2-a-2x^2}{1-x}$, 当 $a>3$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty, 1)$ 内单调递减, 故 C 正确;

对于 D, 由于函数的定义域为 $(-\infty, 1)$, 没有对称性, 则函数 $f(x)$ 的图象不可能是轴对称图形, 故 D 错误. 故选 AC.

试做反馈 本题错因是错选 D, D 选项需要结合函数定义域来分析函数图象的对称性, 与 2024 年全国新课标 I 卷第 18 题第 2 问、2024 年全国新课标 II 卷第 11 题中 C, D 选项考点设置类似, 学生做题不适应, 导致错误.

10. ACD 【热风向】异面直线所成角、线面平行的判定、三棱锥的体积及外接球的表面积

【深度解析】对于 A, 如图①, 取 A_1C_1 的中点 D , 连接 B_1D, AD , 由三棱柱的结构特征可得 $B_1D \parallel BQ$, 则 $\angle AB_1D$ 或其补角为异面直线 AB_1 与 BQ 所成的角. 由 Q 是 AC 的中点, $BQ=2, AC=4$ 得, $\triangle ABC$ 是以 AC 为斜边的直角三角形 (提示: 直角三角形斜边的中线等于斜边的一半). 又 $\angle BAC = 45^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 所以 $AB = BC = 2\sqrt{2}$, 所以 $AB_1 = 2\sqrt{6}$, 又 $B_1D = 2$, $AD = 2\sqrt{5}$, 所以在 $\triangle AB_1D$ 中, 由余弦定理的推论得 $\cos \angle AB_1D = \frac{AB_1^2 + B_1D^2 - AD^2}{2AB_1 \times B_1D} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 故直线 AB_1 与直线 BQ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$, 故 A 正确;

高分关键

得到关于 a, c 的齐次方程, 等号两边同时除以 a^2

高分关键

讨论 $a=0, a>0, a<0$ 三种情况, 最终得到 $\begin{cases} a<0, \\ b>1 \end{cases}$

高分关键

将问题转化为两函数的零点相同

高分关键

构造函数, 利用导数判断函数在定义域内的单调性, 从而得到 $-a = b > 1$

高分关键

判断函数图象是否过定点, 需要排除解析式中参数影响, 即参数前系数为 0

高分关键

轴对称图形或中心对称图形的第一判断要素为定义域是否关于某条直线对称

高分关键

将异面直线的夹角转化为共面直线的夹角

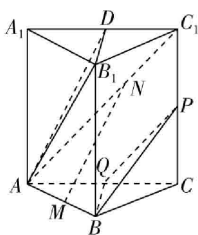
高分关键

利用余弦定理的推论解三角形求夹角

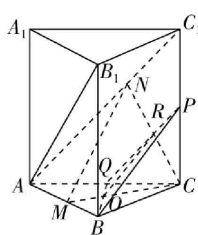
对于B,如图②,连接MC交BQ于点O,则点O为△ABC的重心,即CO:OM=2:1,连接CN交PQ于点R,连接OR,若存在点N,使得直线MN//平面PBQ,则由线面平行的性质定理得MN//OR.因为点P,Q分别为线段CC₁,AC的中点,所以PQ//AC₁,CR=RN.由MN//OR知点O为线段MC的中点,这与CO:OM=2:1矛盾,故假设不成立,即不存在点N,使得直线MN//平面PBQ,故B错误;

对于C, $V_{N-BPQ} = \frac{1}{3}d_N \times S_{\triangle BPQ}$,又 $d_N = \sqrt{2}$ (提示:因为P,Q分别为CC₁,AC的中点,所以PQ//AC₁,又PQ⊂平面BPQ,AC₁⊄平面BPQ,所以AC₁//平面BPQ,则点N到平面BPQ的距离不变), $S_{\triangle BPQ}$ 为定值,即 V_{N-BPQ} 是定值,故C正确;

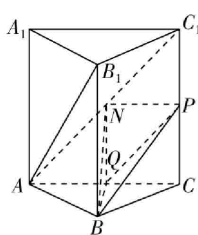
对于D,如图③,AQ=BQ=2,则∠BAC=∠ABQ=45°,即∠AQB=90°,即AC⊥BQ,又平面ACC₁A₁⊥平面ABC,且平面ACC₁A₁∩平面ABC=AC,BQ⊂平面ABC,所以BQ⊥平面ACC₁A₁.当点N为线段AC₁的中点时,△PQN是等腰直角三角形,把三棱锥P-BQN补形为棱长为2的正方体,则线段PB为三棱锥P-BQN外接球的直径,即外接球半径 $R = \sqrt{3}$,外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 12\pi$,故D正确.故选ACD.



图①



图②



图③

风向解读 立体几何中的动点问题(动点轨迹、动点位置关系等)是高考的热点与难点,一般涉及空间中的线面位置关系、棱锥体积变化等,考查空间想象能力以及逻辑思维能力.本题中研究当动点N变化时,线面位置关系以及棱锥体积的变化,解题时需要关注动点变化对位置关系的影响.

11. BCD 【热题型】抛物线和圆的几何性质及三角形面积的最值问题

【深度解析】由题可知, $F(1,0)$,设点 $M(x,y)$,则 $\frac{|MF|}{|MA|} = \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-4)^2+y^2}} = 2$,化简得 $x^2+y^2-10x+21=0$,即 $(x-5)^2+y^2=4$,则动点M的轨迹是以 $D(5,0)$ 为圆心,2为半径的圆.

对于A,因为 $(3-5)^2+2^2=8 \neq 4$,所以点B不在动点M的轨迹上,故A错误;

对于B,抛物线的准线方程为 $x=-1$,如图,过点P作准线的垂线,垂足为H,

则 $|PB|+|PF| = |PB|+|PH|$,当且仅当B,P,H三点共线时, $|PB|+|PF|$ 取得最小值,即 $|PB|+|PH| \geq 3+1=4$,又 $|BF| = \sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{2}$,所以△PFB周长的最小值为 $4+2\sqrt{2}$,故B正确;

对于C,如图,当MF与圆相切且点M在x轴上方时,∠MFB最小.

连接MD,所以MD⊥MF,由于 $|FD|=4=2|MD|$,

故∠MFD=30°, $|MF| = \sqrt{4^2-2^2} = 2\sqrt{3}$,

所以点M的横坐标为 $|MF| \times \cos \angle MFD + 1 = 4$,故C正确;

对于D,因为 $|BF| = 2\sqrt{2}$ 为定值,所以若△BFM的面积取得最大值,则只需要动点M到直线BF的距离最远即可,直线BF: $y = \frac{2-0}{3-1}(x-1)$,即 $x-y-1=0$,所以点D到直线BF的距离为

$\frac{|5-0-1|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}$,所以M到直线BF的最大距离为 $2\sqrt{2}+2$,所以△BFM面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times$

$2\sqrt{2} \times (2\sqrt{2}+2) = 4+2\sqrt{2}$,故D正确.故选BCD.

12. $y=-x+1$ 【热考点】导数的几何意义

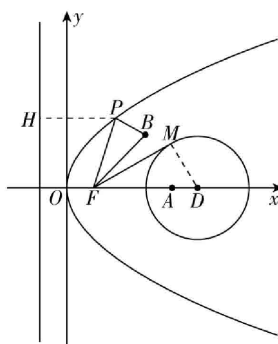
【深度解析】由题可得 $y' = (2x+1)e^x - 2$,

当 $x=0$ 时, $y'|_{x=0} = -1$,即 $k=-1$,所以所求切线方程为 $y=-(x-0)+1=-x+1$.

13. $2\sqrt{3}$ 【热考点】三角形面积公式

【深度解析】由题意知,△ABC的面积为 $\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times AC \times \sin 60^\circ = 3+\sqrt{3}$,

解得 $AC = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.根据余弦定理可得, $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$,即 $BC^2 = (2\sqrt{2})^2 +$



高分关键

对于立体几何部分探究题目,可以先假设存在,再去证明,有矛盾,则情况不存在

高分关键

确定三棱锥P-BQN为正方体的一部分,故利用补形法将三棱锥外接球转化为正方体外接球

高分关键

利用抛物线的定义以及三角形三边关系确定 $(|PB|+|PF|)_{\min}$ 取得条件

失分注意

相切是临界情况,点B固定,所以应取FM为最上方与圆相切时的情况

失分注意

$S_{\triangle BFM} = \frac{1}{2}|BF| \cdot h$,其中 $|BF|$ 为定值,当 h (点M到直线BF的距离)最大时,面积取得最大值,考查面积最大,需要考虑减少变量因素,单一变量更易控制

失分注意

利用导数几何意义求切线方程时,需要关注“在”和“过”某点的区别

$$(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2-2\times 2\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times\frac{1}{2}=12, \text{ 则 } BC=2\sqrt{3}.$$

14. $-6+3e^3$ 【热题型】利用导数研究函数最值

思路导引 作出函数 $y=f(x)$ 的图象 \rightarrow 令 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=a$, 根据图象分析可知直线 $y=a$ 与 $y=f(x)$ 的图象有三个交点, 可得 $x_1+x_2=-2, x_3=e^a \rightarrow$ 代入可得 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+x_3f(x_3)=-2a+ae^a \rightarrow$ 令 $g(a)=-2a+ae^a, 2<a\leq 3 \rightarrow$ 利用导数求其最值即可

深度解析 根据题意作出函数 $y=f(x)$ 的图象, 如图所示.

令 $y=2$, 解得 $x=-1$ 或 $x=e^2$.

令 $y=3$, 解得 $x=-2$ 或 $x=0$ 或 $x=e^3$.

令 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=a$, 则由题意知, 直线 $y=a$ 与 $y=f(x)$ 的图象有三个交点, 则 $2<a\leq 3$,

此时 $-2\leq x_1<-1<x_2\leq 0<e^2<x_3\leq e^3$, 且 $x_1+x_2=-2$.

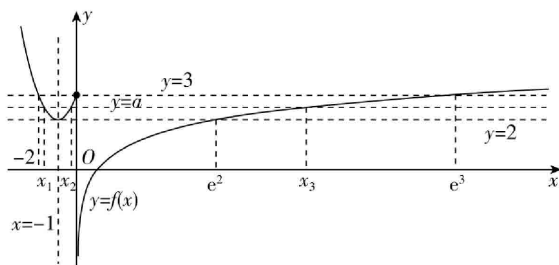
令 $f(x_3)=\ln x_3=a$, 可得 $x_3=e^a$,

则 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+x_3f(x_3)=ax_1+ax_2+ax_3=-2a+ae^a$.

令 $g(a)=-2a+ae^a, 2<a\leq 3$, 则 $g'(a)=-2+(a+1)e^a>-2+3e^2>0$,

可知 $g(a)$ 在 $(2, 3]$ 内单调递增, 则 $g(a)$ 的最大值为 $g(3)=-6+3e^3$,

所以 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+x_3f(x_3)$ 的最大值为 $-6+3e^3$.



15. (1) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ (2) $T_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为偶数,} \\ -n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

【热考点】数列的通项公式求解和并项求和法

【解】(1) 第一步: 利用 S_n 与 a_n 的关系, 确定数列 $\{a_n\}$ 的递推公式

由 $2S_n=3-a_n$, 得 $2S_{n+1}=3-a_{n+1}$,

两式相减得, $2a_{n+1}=-a_{n+1}+a_n, \dots\dots\dots 2$ 分

第二步: 求等比数列的通项公式

即 $3a_{n+1}=a_n$, 即 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$,

当 $n=1$ 时, $2a_1=3-a_1$, 即 $a_1=1, \dots\dots\dots 4$ 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列, 故 $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \dots\dots\dots 5$ 分

(2) 第一步: 利用 (1) 和已知条件求得 $\{b_n\}$ 的通项公式

由 (1) 得 $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, 则 $b_n = \log_{\frac{1}{3}} a_{2n} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = 2n-1$,

故 $(-1)^n b_n = (-1)^n (2n-1). \dots\dots\dots 7$ 分

第二步: 讨论 n 的奇偶求得数列的前 n 项和

当 n 为偶数时, $T_n = -b_1+b_2-b_3+b_4-\dots-b_{n-1}+b_n = -1+3-5+7-\dots-(2n-3)+(2n-1) = (-1+3) + (-5+7) + \dots + [-(2n-3)+(2n-1)] = n; \dots\dots\dots 10$ 分

当 n 为奇数时, $n-1$ 为偶数,

$T_n = -b_1+b_2-b_3+b_4-\dots-b_{n-2}+b_{n-1}-b_n = T_{n-1}-b_n = n-1-(2n-1) = -n. \dots\dots\dots 12$ 分

综上, $T_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为偶数,} \\ -n, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \dots\dots\dots 13$ 分

16. (1) $\frac{8}{11}$ (2) 见解析, $E(X) = \frac{11}{4}$

【热素材】条件概率、概率乘法公式、离散型随机变量的分布列和数学期望

【解】(1) 甲、乙、丙答对题目分别记为事件 A, B, C , 三人中恰有两人答对题目记为事件 D ,

$\dots\dots\dots 1$ 分

第一步: 利用相互独立事件的概率乘法公式分别求得 $P(D), P(AD)$

$$P(D) = P(ABC) + P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{24}, \dots\dots\dots 3$$

$$P(AD) = P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \dots\dots\dots 5$$

► 高分关键

数形结合思想求得 a 的取值范围, 利用二次函数图象的对称性求得 x_1+x_2

► 第 (1) 问 5 分, 分成递推公式 (2 分) 前后项关系 (2 分) 结论 (1 分) 三个部分给分

► 求得数列的递推公式, 给 1 分

► 数列首项, 给 1 分

► 写出结论, 给 1 分

► 第 (2) 问 8 分, 分成数列 $\{b_n\}$ (2 分) 前 n 项和 (5 分) 结论 (1 分) 三个部分给分

► 写出 n 为偶数时 T_n 的表达式, 给 1 分, 化简正确给 2 分

► 写出 n 为奇数时 T_n 的表达式, 给 2 分

► 结论正确写成分段形式, 给 1 分

► 第 (1) 问 7 分, 分成概率乘法公式 (5 分) 条件概率 (2 分) 两个部分给分

► 写出 $P(D)$ 的表达式得 1 分, 不写表达式扣 1 分

► 写出 $P(AD)$ 的表达式得 1 分, 不写表达式扣 1 分

第二步:利用条件概率公式求解

$$\text{所以 } P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{11}{24}} = \frac{8}{11}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(2) 第一步:确定 X 的所有可能取值

由题意可知, X 的所有可能取值为 $-3, 0, 3, 6$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

第二步:分别求得相应概率

$$\begin{aligned} \text{则 } P(X=-3) &= \left(1-\frac{2}{3}\right) \times \left(1-\frac{3}{4}\right) \times \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}, \\ P(X=0) &= \left(1-\frac{2}{3}\right) \times \left(1-\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} + \left(1-\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} \times \left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} \times \left(1-\frac{3}{4}\right) \times \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \\ P(X=3) &= \left(1-\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \left(1-\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{24}, \\ P(X=6) &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

第三步:写出 X 的分布列

所以 X 的分布列为

X	-3	0	3	6
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$

$\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

第四步:利用公式求出数学期望

$$\text{故 } E(X) = -3 \times \frac{1}{24} + 0 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{11}{24} + 6 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{4}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

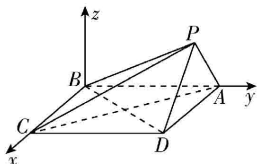
17. (1) 见解析 (2) $2\sqrt{3}$

【热题型】异面直线垂直的证明、线面角的计算

(1) 【证明】(建系法)

第一步:建立空间直角坐标系,求出相应点坐标

由题易知, $BC \perp AB$, 又 $BC \perp AP$, $AB \cap AP = A$, $AB, AP \subset$ 平面 APB , 所以 $BC \perp$ 平面 APB . $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$
以点 B 为坐标原点, 以 BC, BA 所在直线分别为 x, y 轴, 过点 B 作 $Bz \perp$ 平面 $ABCD$ 建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $PB=BC=a$, $\angle PBA=\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$$\text{则 } P(0, a \cos \theta, a \sin \theta), C(a, 0, 0), D\left(a, \frac{a}{\cos \theta}, 0\right), A\left(0, \frac{a}{\cos \theta}, 0\right), \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

第二步:求得对应向量坐标,进而利用向量数量积为零证得线线垂直

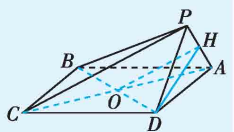
$$\text{则 } \overrightarrow{BD} = \left(a, \frac{a}{\cos \theta}, 0\right), \overrightarrow{CP} = (-a, a \cos \theta, a \sin \theta), \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BD} = -a^2 + a^2 = 0, \text{ 所以 } PC \perp BD. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

一题多解 (几何法)

第一步:利用线面垂直证得线线垂直

如图, 设 AC, BD 交于点 O , 取 PA 的中点 H , 连接 OH, DH ,
由题知 $BC \perp AB$, 又 $BC \perp AP$, $AB \cap AP = A$, $AB, AP \subset$ 平面 APB ,
所以 $BC \perp$ 平面 APB . 因为 $BP \subset$ 平面 APB , 所以 $BC \perp BP$.



因为 $AD \parallel BC$, 所以 $AD \perp$ 平面 APB . 又因为 $AP \subset$ 平面 APB , 所以 $AD \perp AP$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

第二步:利用勾股定理的逆定理求证

$$\text{设 } PB=BC=a, PA=b, \text{ 则 } BA = \sqrt{a^2 + b^2}, PC = \sqrt{2}a, \\ \text{则 } OH^2 = \left(\frac{PC}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}, OD^2 = \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \frac{2a^2 + b^2}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4}, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{由 } AD \perp AP \text{ 知 } DH^2 = DA^2 + AH^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} = OH^2 + OD^2,$$

即 $OH \perp OD$, 故 $PC \perp BD$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

▶ 结论正确, 给 2 分

▶ 第 (2) 问 8 分, 分成概率 (5 分) 分布列 (1 分) 期望 (2 分) 三个部分给分

▶ 正确写出 X 的所有可能值, 得 1 分

▶ 分别求得相应概率, 正确一个得 1 分

▶ 写出 X 的分布列, 得 1 分

▶ 正确利用数学期望公式, 给 2 分, 只有结果给 1 分

▶ 第 (1) 问 7 分, 分成建系写坐标 (4 分) 数量积 (3 分) 两个部分给分

▶ 建系得 1 分, 写对坐标再得 1 分

▶ 利用向量的数量积证得垂直, 给 1 分

▶ 正确作出辅助线, 得 1 分

▶ 用线面垂直的性质证得线线垂直, 得 1 分

▶ 利用勾股定理的逆定理, 正确得 1 分

(2)【解】第一步:求得平面 PAD 的法向量及 \vec{AC} 的坐标

由(1)易知, $AD \perp$ 平面 PAB , 因为 $BP \subset$ 平面 PAB , 所以 $AD \perp BP$,

又 $PA \perp BP$, 且 $PA \cap AD = A$, $PA, AD \subset$ 平面 PAD , 所以 $BP \perp$ 平面 PAD , 10 分

即 \vec{BP} 是平面 PAD 的一个法向量, $\vec{BP} = (0, a \cos \theta, a \sin \theta)$ 11 分

第二步:利用向量夹角公式得解

设直线 AC 与平面 PAD 所成的角为 α ,

$$\text{又 } \vec{AC} = \left(a, -\frac{a}{\cos \theta}, 0 \right),$$

$$\text{则 } \frac{\sqrt{5}}{5} = \sin \alpha = |\cos \langle \vec{BP}, \vec{AC} \rangle| = \frac{|\vec{BP} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{BP}| |\vec{AC}|} = \frac{a^2}{a^2 \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}}}, \text{ 13 分}$$

$$\text{解得 } \cos^2 \theta = \frac{1}{4}, \text{ 又 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \cos \theta = \frac{1}{2}, \text{ 此时 } \vec{AP} = (0, -3, \sqrt{3}), \text{ 所以 } AP = 2\sqrt{3}. \text{ 15 分}$$



试做反馈 本题平均得分为 7.2 分, 由于未设长度, 导致学生不适应, 但试题设计较好, 对学生有区分度.

18. (1) 见解析 (2) $[-1, +\infty)$ (3) 见解析

【热考点】导数的应用, 利用导数判断函数的单调区间, 不等式恒成立问题



思路导引 (1) $f(x) = x - 2\ln x + \frac{3}{x} \rightarrow$ 求导 \rightarrow 结果;

(2) $\xrightarrow{\text{参变分离}} a \geq 2x \ln x - x^2 \xrightarrow{\text{构造函数}} g(x) \xrightarrow{\text{问题转化}} \text{求 } g(x) \text{ 的最大值即可};$

(3) 取 $a = -1 \rightarrow 2\ln x < x - \frac{1}{x} \rightarrow x = \sqrt{1 + \frac{1}{n-1}}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}^* \rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) < \frac{\frac{1}{n-1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n-1}}} \xrightarrow{\text{整理累加}} \text{即可}$

证明不等式

(1)【解】第一步:函数求导

当 $a = 3$ 时, $f(x) = x - 2\ln x + \frac{3}{x}, x \in (0, +\infty)$,

$$\text{则 } f'(x) = 1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{x^2}. \text{ 2 分}$$

第二步:令导数等于零求得极值点

由 $f'(x) = 0$, 得 $x = 3$.

第三步:探究导数符号, 进而确定单调区间

令 $f'(x) < 0$, 解得 $x \in (0, 3)$; 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x \in (3, +\infty)$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 4 分

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 3)$, 单调递增区间为 $(3, +\infty)$ 5 分

(2)【解】第一步:参变分离

因为 $x \geq 1, f(x) = x - 2\ln x + \frac{a}{x} \geq 0$ 恒成立, 所以 $a \geq 2x \ln x - x^2$ 恒成立. 6 分

第二步:构造函数, 研究其单调性, 确定参数范围

令 $g(x) = 2x \ln x - x^2 (x \geq 1)$, 则 $g'(x) = 2\ln x + 2 - 2x$.

令 $h(x) = 2\ln x + 2 - 2x (x \geq 1)$, 则 $h'(x) = \frac{2}{x} - 2 \leq 0$ 恒成立, 8 分

即 $h(x) = 2\ln x + 2 - 2x$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递减,

又 $h(1) = 0 + 2 - 2 = 0$, 所以 $h(x) \leq h(1) = 0$, 即 $h(x) \leq 0$.

所以 $x \in [1, +\infty)$ 时, $g'(x) \leq 0$, 9 分

所以 $g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $g(x) \leq g(1) = -1$, 所以 $a \geq -1$,

综上, 实数 a 的取值范围为 $[-1, +\infty)$ 10 分

(3)【证明】第一步:确定不等关系

由(2)知, 取 $a = -1$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) = x - 2\ln x - \frac{1}{x} > 0$, 所以 $2\ln x < x - \frac{1}{x}$ 11 分

► 第(2)问 8 分, 分成线面垂直(3 分)法向量(1 分)夹角公式(2 分)结论(2 分)四个部分给分

► 正确利用向量夹角公式, 写对公式得 1 分

► 由 θ 范围求得 $\cos \theta$, 得 1 分

► 第(1)问 5 分, 分成求导(2 分)单调区间(3 分)两个部分给分

► 正确写出定义域, 否则扣 1 分

► 正确写出结论得 1 分

► 第(2)问 5 分, 分成参变分离(1 分)构造函数求导(2 分)求单调区间(1 分)结论(1 分)四个部分给分

► 参变分离, 构造函数确定单调性, 得 2 分

► 求得 $h'(x) \leq 0$, 得 1 分

► 求得 $g'(x) \leq 0$, 得 1 分

► 写得 a 的范围, 得 1 分

► 第(3)问 7 分, 分成确定不等关系(1 分)代换变量找不等关系(4 分)证得结论(2 分)三个部分给分

第二步:变换不等式形式探究规律

设 $x = \sqrt{1 + \frac{1}{n-1}}, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 则满足 $x > 1$,

所以 $2\ln \sqrt{1 + \frac{1}{n-1}} < \sqrt{1 + \frac{1}{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n-1}}}$,

即 $\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n-1}}}$, 13 分

所以 $\ln n - \ln(n-1) = \ln \frac{n}{n-1} < \frac{1}{\sqrt{n^2-n}}$, 15 分

第三步:将所证式拆开证明结论

所以 $\ln n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + [\ln n - \ln(n-1)] < \frac{1}{\sqrt{2^2-2}} + \frac{1}{\sqrt{3^2-3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-n}}$,

即 $\ln n < \frac{1}{\sqrt{2^2-2}} + \frac{1}{\sqrt{3^2-3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-n}}$ 17 分

19. (1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ (2) 过定点(1,0),理由见解析 (3) 16

【热趋势】直线与椭圆方程联立的化简计算,利用消参数的方法求解直线过定点问题,分式型函数求最值问题

【解】(1) 由条件可知 $\begin{cases} 2a=6, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{64}{9b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2=9, \\ b^2=8, \end{cases}$ 所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 4 分

(2) 第一步:设 CD 方程,与椭圆方程联立消元

由(1)可知 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$, 则 $A(-3,0), B(3,0)$.

因为 P 不在 x 轴上,所以直线 CD 的倾斜角不为零,

设直线 $CD: x = ty + m, C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1, \\ x = ty + m, \end{cases}$ 消去 x 整理得 $(8t^2 + 9)y^2 + 16mty + 8m^2 - 72 = 0$,

..... 6 分

第二步:写出根与系数的关系,表示出点 P 的纵坐标得到等量关系,代入变形整理

所以 $\Delta = (16mt)^2 - 4(8m^2 - 72)(8t^2 + 9) > 0$, 即 $m^2 < 8t^2 + 9, y_1 + y_2 = -\frac{16mt}{8t^2 + 9}, y_1 y_2 = \frac{8m^2 - 72}{8t^2 + 9}$,

所以 $ty_1 y_2 = \frac{9-m^2}{2m}(y_1 + y_2)$ 7 分

由题意得直线 $AC: y = \frac{y_1}{x_1 + 3}(x + 3)$, 令 $x = 9$, 所以 $y_P = \frac{12y_1}{x_1 + 3}$.

直线 $BD: y = \frac{y_2}{x_2 - 3}(x - 3)$, 令 $x = 9$, 所以 $y_P = \frac{6y_2}{x_2 - 3}$,

故 $\frac{12y_1}{x_1 + 3} = \frac{6y_2}{x_2 - 3}$, 即 $\frac{12y_1}{ty_1 + m + 3} = \frac{6y_2}{ty_2 + m - 3}$, 化简得 $ty_1 y_2 + (2m - 6)y_1 - (m + 3)y_2 = 0$,

故 $\frac{9-m^2}{2m}(y_1 + y_2) + (2m - 6)y_1 - (m + 3)y_2 = 0$,

化简得 $(m - 1)(m - 3)y_1 - (m - 1)(m + 3)y_2 = 0$,

即 $(m - 1)[(m - 3)y_1 - (m + 3)y_2] = 0$ 9 分

第三步:探究直线 CD 的方程

若 $(m - 3)y_1 - (m + 3)y_2 = 0$, 代入 $y_1 + y_2 = -\frac{16mt}{8t^2 + 9}, y_1 y_2 = \frac{8m^2 - 72}{8t^2 + 9}$, 无解,

所以 $m - 1 = 0$, 即 $m = 1$, 所以直线 $CD: x = ty + 1$, 即直线 CD 恒过定点(1,0). 11 分

▶ 代换变量,得到新的不等式,得 1 分

▶ 变换不等式得 1 分

▶ 累加不等式转化为所证结论,得 2 分

▶ 第(1)问 4 分,按照标准方程给分

▶ 第(2)问 7 分,分成联立方程消元(2 分) C, D 点纵坐标的关系(3 分) 直线过定点(2 分)三个部分给分

▶ 联立方程,得 1 分,消元得一元二次方程再得 1 分

▶ 由根与系数的关系写出关系式,给 1 分

▶ 写出因式积形式的方程,给 2 分

▶ 说明此种情况无解,给 1 分

▶ 求得恒过定点,给 1 分

(3) 第一步: 由(2)知直线 CD 的方程, 表示 $|y_1 - y_2|$

由(2)知, 直线 $CD: x = ty + 1$, 所以 $(8t^2 + 9)y^2 + 16ty - 64 = 0$,

则 $y_1 + y_2 = -\frac{16t}{8t^2 + 9}, y_1 y_2 = -\frac{64}{8t^2 + 9}$,

所以 $|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{\left(-\frac{16t}{8t^2 + 9}\right)^2 - 4 \times \frac{-64}{8t^2 + 9}} = 48 \sqrt{\frac{t^2 + 1}{(8t^2 + 9)^2}}$,

$$\frac{t^2 + 1}{(8t^2 + 9)^2} = \frac{t^2 + 1}{[8(t^2 + 1) + 1]^2} = \frac{1}{64(t^2 + 1) + \frac{1}{t^2 + 1} + 16}, \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

第二步: 利用对勾函数的性质求得最值

当 $t = 0$ 时, $64(t^2 + 1) + \frac{1}{t^2 + 1} + 16$ 取得最小值 $64 + 1 + 16 = 81$,

此时 $\frac{t^2 + 1}{(8t^2 + 9)^2}$ 取得最大值 $\frac{1}{81}$. $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

所以 $|y_1 - y_2|_{\max} = 48 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{3}$,

所以四边形 $ACBD$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |AB| \times |y_1 - y_2| \leq \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{16}{3} = 16$,

所以四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 16. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

趋势预测 圆锥曲线中的定点、定值、定直线问题以及几何图形的面积最值(范围)问题是高考的重点与难点, 特点是计算量大, 需要一定的解题技巧. 本题考查直线与椭圆的位置关系, 研究直线过定点以及四边形面积的最值问题, 解题时可考虑从特殊到一般的方法求解.

▶ 第(3)问 6 分, 分成变形整理 $|y_1 - y_2|$ 的表达式(3 分) 面积(3 分) 两个部分给分

▶ 用 t 的代数式表示 $|y_1 - y_2|$, 给 1 分

▶ 利用对勾函数性质求得最值, 给 1 分

▶ 求得四边形面积的最大值, 给 2 分

2025 年全国高考名校名师联席命制
 数学信息卷(三)

信息卷(三)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	D	B	D	B	C	B	C	A	ABD	AB	ABD	$2 \frac{1}{64}$	$\sqrt{5}$	72

1. D 【热点考】复数的概念与复数的模

【深度解析】若 $z = a^2 - 1 + (a + 1)i (a \in \mathbf{R})$ 为纯虚数, 则 $\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a + 1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $a = 1$, 则 $z = 2i$, 则 $|z| = 2$. 故选 D.

2. B 【热点考】向量的数量积、向量夹角的计算、垂直关系的向量表示

【深度解析】设 a, b 的夹角为 θ , 因为 $(4a - b) \perp (a + 3b)$, 且 a, b 为单位向量, 所以 $(4a - b) \cdot (a + 3b) = 4a^2 - 3b^2 + 11a \cdot b = 4 - 3 + 11 \times 1 \times 1 \times \cos \theta = 1 + 11 \cos \theta = 0$, 所以 $\cos \theta = -\frac{1}{11}$. 故选 B.

3. D 【热题型】判断命题的充分、必要条件, 根据存在量词命题的真假求参数范围

【深度解析】若 $\exists x \in [-1, 2], \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} - a \geq 0$, 则 $a \leq \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}\right)_{\max}, x \in [-1, 2]$. 令 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}, x \in [-1, 2]$, 因为 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 2$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 的最大值是 $f(2) = \frac{5}{2}$, 则 $a \leq \frac{5}{2}$, 则 $a \leq \frac{5}{2}$ 的一个必要不充分条件是 $a \leq 3$. 故选 D.

4. B 【热点考】众数、中位数、平均数、方差

【深度解析】若 7 个裁判的评分分别为 10, 10, 9.9, 9.9, 9.9, 9.9, 9.7, 去掉两个最高分与两个最低分后评分为 9.9, 9.9, 9.9, 两组数据的中位数都为 9.9, 故 A 错误; 若 7 个裁判的评分分别为 10, 10, 9.9, 9.9, 9.9, 9.8, 9.7, 去掉两个最高分与两个最低分前平均数为 $\bar{x} = \frac{1}{7} \times (10 + 10 + 9.9 + 9.9 + 9.9 + 9.8 + 9.7) \approx 9.89$, 去掉两个最高分与两个最低分后平均数为 $\bar{x}' = \frac{1}{3} \times (9.9 + 9.9 + 9.9) = 9.9$, 故 C 错误; 若 7 个裁判的评分分别为 10, 10, 10, 9.9, 9.9, 9.8, 9.8, 此时众数为 10, 去掉两个最高分与两个

评分细则

- ▶ 失分注意
忽视 $a + 1 \neq 0$ 致误
- ▶ 高分关键
向量垂直可以转化为两向量的数量积为 0
- ▶ 失分注意
正确理解充分条件和必要条件, 在题干条件下若求真命题的一个必要不充分条件, 则 $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ 是 a 的取值范围的真子集; 而若求真命题的一个充分不必要条件, 则 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ 的真子集